Binômio de Newton

Raquel de Souza Francisco Bravo

e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

06 de outubro de 2016

Conteúdo:

- Definição de binômio
- Introdução ao binômio de Newton
- Teorema binomial

Lembretes importantes

(1) Combinação complementar $\mathrm{C}(n, r) = \mathrm{C}(n, n-r)$

Lembretes importantes

(1) Combinação complementar $\mathrm{C}(n, r) = \mathrm{C}(n, n-r)$

(2) Relação de Stifel :

$$\mathrm{C}(n, r) = \mathrm{C}(n-1, r-1) + \mathrm{C}(n-1, r) \qquad \begin{array}{l} n = 2, \ldots \\ r = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

Lembretes importantes

(1) Combinação complementar $C(n,r) = C(n, n-r)$

(2) Relação de Stifel :

$$C(n,r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r) \qquad \begin{array}{l} n = 2, \ldots \\ r = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

(3) Condições de fronteira : $C(n,0) = C(n,n) = 1$

Lembretes importantes

(1) Combinação complementar $C(n,r) = C(n, n-r)$

(2) Relação de Stifel :

$$C(n,r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r) \qquad \begin{matrix} n = 2, \ldots \\ r = 0, 1, \ldots, n-1 \end{matrix}$$

(3) Condições de fronteira : $C(n,0) = C(n,n) = 1$

(4) Condições secundárias $C(n,1) = C(n, n-1) = n$

Binômio de Newton: introdução

Definição de binômio:

- Chamamos de binômio qualquer expressão da forma $a + b$, onde a e b são símbolos diferentes.

Binômio de Newton: introdução

Definição de binômio:

Chamamos de binômio qualquer expressão da forma $a + b$, onde a e b são símbolos diferentes.

Exemplo 1: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $x - y = x + (-y)$ é um binômio

Binômio de Newton: introdução

Definição de binômio:

Chamamos de binômio qualquer expressão da forma $a + b$, onde a e b são símbolos diferentes.

Exemplo 1: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $x - y = x + (-y)$ é um binômio ($a := x$, $b := -y$)

Binômio de Newton: introdução

Definição de binômio:

Chamamos de binômio qualquer expressão da forma $a + b$, onde a e b são símbolos diferentes.

Exemplo 1: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $x - y = x + (-y)$ é um binômio ($a := x$, $b := -y$)

(b) $3xy + x^2$ é um binômio

Binômio de Newton: introdução

Definição de binômio:

Chamamos de binômio qualquer expressão da forma $a + b$, onde a e b são símbolos diferentes.

Exemplo 1: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $x - y = x + (-y)$ é um binômio ($a := x$, $b := -y$)

(b) $3xy + x^2$ é um binômio ($a := 3xy$, $b := x^2$)

Binômio de Newton: introdução

Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio $a + b$, $(a + b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

Binômio de Newton: introdução

Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio a + b, $(a + b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

$$(a + b)^0 = 1$$

Binômio de Newton: introdução

Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio a + b, $(a + b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a+b$$

Binômio de Newton: introdução

Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio a + b, $(a + b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a+b$$

$$(a + b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Binômio de Newton: introdução

Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio a + b, $(a + b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a+b$$

$$(a + b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binômio de Newton: introdução

Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio a + b, $(a + b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a+b$$

$$(a + b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Observação: os coeficientes dos termos podem ser ordenados da seguinte forma:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

Binômio de Newton: introdução

Exemplo 2:

Desenvolva as potências do binômio a + b, $(a + b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Observação: os coeficientes dos termos podem ser ordenados da seguinte forma:

1				C_0^0			
1	1			C_1^0	C_1^1		
1	2	1		C_2^0	C_2^1	C_2^2	
1	3	3	1	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3

Triângulo de Pascal

Exemplo 3:

Calcule a linha $n = 4$ do triângulo de Pascal e verifique que são os coeficientes da expansão de $(a + b)^4$.

Binômio de Newton

Exemplo 3:

Calcule a linha $n = 4$ do triângulo de Pascal e verifique que são os coeficientes da expansão de $(a + b)^4$.

Resolução: $n = 3$ 1 3 3 1

Exemplo 3:

Calcule a linha $n = 4$ do triângulo de Pascal e verifique que são os coeficientes da expansão de $(a + b)^4$.

Resolução:

$$\begin{array}{lccccc}
n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
n = 4 & \underbrace{1}_{\text{C.F.}} & \underbrace{4}_{\substack{\text{C.S.}\\ \text{ou}\\ \text{R.S.}}} & \underbrace{6}_{\text{R.S.}} & \underbrace{4}_{\substack{\text{C.S.}\\ \text{ou}\\ \text{R.S.}}} & \underbrace{1}_{\text{C.F.}}
\end{array}$$

Exemplo 3:

Calcule a linha $n = 4$ do triângulo de Pascal e verifique que são os coeficientes da expansão de $(a + b)^4$.

Resolução:

$$\begin{array}{cccccc}
n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
n = 4 & \underbrace{1}_{\text{C.F.}} & \underbrace{4}_{\substack{\text{C.S.}\\ \text{ou}\\ \text{R.S.}}} & \underbrace{6}_{\text{R.S.}} & \underbrace{4}_{\substack{\text{C.S.}\\ \text{ou}\\ \text{R.S.}}} & \underbrace{1}_{\text{C.F.}}
\end{array}$$

Cálculo de $(a + b)^4$:

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

Exemplo 3:

Calcule a linha $n = 4$ do triângulo de Pascal e verifique que são os coeficientes da expansão de $(a + b)^4$.

Resolução:

$$
\begin{array}{lccccc}
n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
n = 4 & \underbrace{1}_{\text{C.F.}} & \underbrace{4}_{\substack{\text{C.S.}\\ \text{ou}\\ \text{R.S.}}} & \underbrace{6}_{\text{R.S.}} & \underbrace{4}_{\substack{\text{C.S.}\\ \text{ou}\\ \text{R.S.}}} & \underbrace{1}_{\text{C.F.}}
\end{array}
$$

Cálculo de $(a + b)^4$:

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= a(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Exemplo 3:

Calcule a linha $n = 4$ do triângulo de Pascal e verifique que são os coeficientes da expansão de $(a + b)^4$.

Resolução:

$$\begin{array}{lccccc} n = 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & & \searrow \ \downarrow & & \\ n = 4 & \underbrace{1}_{\text{C.F.}} & \underbrace{4}_{\text{C.S. ou R.S.}} & \underbrace{6}_{\text{R.S.}} & \underbrace{4}_{\text{C.S. ou R.S.}} & \underbrace{1}_{\text{C.F.}} \end{array}$$

Cálculo de $(a + b)^4$:

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= a(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= \underbrace{1}_{C_4^0} a^4 + \underbrace{4}_{C_4^1} a^3b + \underbrace{6}_{C_4^2} a^2b^2 + \underbrace{4}_{C_4^3} ab^3 + \underbrace{1}_{C_4^4} b^4$$

Teorema Binomial (Binômio de Newton):

Se a e b são números reais e n é um número natural então tem-se:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Teorema Binomial

Prova (princípio de indução matemática):

- Seja $P(n)$: $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

Teorema Binomial

Prova (princípio de indução matemática):

- Seja $P(n)$: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

(1) Base de indução

$P(1)$: $(a+b)^1$

Teorema Binomial

Prova (princípio de indução matemática):

- Seja $P(n)$: $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

(1) Base de indução

$P(1)$: $(a + b)^1 = a + b$

Teorema Binomial

Prova (princípio de indução matemática):

- Seja P(n): $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

(1) Base de indução

P(1): $(a + b)^1 = a + b \overset{C.F.}{=} C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$

Teorema Binomial

Prova (princípio de indução matemática):

- Seja P(n): $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

(1) Base de indução

P(1): $(a + b)^1 = a + b \overset{\text{C.F.}}{=} C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = \sum_{r=0}^{1} C_1^r a^{1-r} b^r$

Teorema Binomial

Prova (princípio de indução matemática):

- Seja $P(n)$: $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

(1) Base de indução

$P(1)$: $(a + b)^1 = a + b \overset{\text{C.F.}}{=} C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = \sum_{r=0}^{1} C_1^r a^{1-r} b^r$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

Teorema Binomial

Prova (princípio de indução matemática):

- Seja P(n): $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

(1) Base de indução

$P(1)$: $(a + b)^1 = a + b \overset{C.F.}{=} C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 = \sum_{r=0}^{1} C_1^r a^{1-r} b^r$

Logo, P(1) é verdadeira

(2) Hipótese de indução (HI)

P(k) é verdadeira

Binômio de Newton

Prova (continuação):

(3) P(k) é verdadeira $\Rightarrow$ P(k + 1) é verdadeira

Binômio de Newton

Prova (continuação):

$$(3)\ \underbrace{P(k)}_{(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r} \text{ é verdadeira} \Rightarrow \underbrace{P(k+1)}_{(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^r a^{k+1-r} b^r} \text{ é verdadeira}$$

Prova (continuação):

(3) $\underbrace{P(k)}$ é verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}$ é verdadeira

$$(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r \qquad (a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^r a^{k+1-r} b^r$$

Desenvolvendo

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$

Prova (continuação):

(3) $\underbrace{P(k)}$ é verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}$ é verdadeira

$$(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r \qquad\qquad (a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^r a^{k+1-r} b^r$$

Desenvolvendo

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^k} \overset{HI}{=} (a+b)\sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r$$

Binômio de Newton

Prova (continuação):

(3) $\underbrace{P(k)}_{(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r}$ é verdadeira $\Rightarrow$ $\underbrace{P(k+1)}_{(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^r a^{k+1-r} b^r}$ é verdadeira

Desenvolvendo

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^k}_{} \overset{HI}{=} (a+b)\sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r =$$

$$= a\sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r + b\sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

ou seja:

$$(a+b)^{k+1} = a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$+\, b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right) =$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

ou seja:

$$(a+b)^{k+1} = a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$+\, b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right) =$$

$$= \; C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k$$

$$+ \; C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} =$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

ou seja:

$$(a+b)^{k+1} = a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$+\, b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k$$

$$+\, C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} =$$

$$= C_k^0\, a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)\, a^k b$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

ou seja:

$$(a+b)^{k+1} = a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$+\, b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k$$

$$+\, C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)\, a^k b + (C_k^1 + C_k^2)\, a^{k-1} b^2$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

ou seja:

$$(a+b)^{k+1} = a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \ldots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$+\, b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \ldots + C_k^{k-1} ab^{k-1} + C_k^k b^k\right) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1}b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k ab^k$$

$$+\, C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1}b^2 + C_k^2 a^{k-2}b^3 + \ldots + C_k^{k-1} ab^k + C_k^k b^{k+1} =$$

$$= C_k^0\, a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1)\, a^k b + (C_k^1 + C_k^2)\, a^{k-1}b^2 + \ldots$$

$$+\, (C_k^{k-1} + C_k^k) ab^k + C_k^k\, b^{k+1}$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

<u>ou seja</u>:

$$(a+b)^{k+1} = a\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right)$$

$$+\, b\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k\right) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k$$

$$+\; C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} =$$

$$= \underbrace{C_k^0}_{\overset{\text{C.F.}}{=}\, 1 \,=\, C_{k+1}^0} a^{k+1} + \underbrace{\left(C_k^0 + C_k^1\right)}_{\overset{\text{R.S.}}{=}\, C_{k+1}^1} a^k b + \underbrace{\left(C_k^1 + C_k^2\right)}_{\overset{\text{R.S.}}{=}\, C_{k+1}^2} a^{k-1} b^2 + \ldots$$

$$+\; \underbrace{\left(C_k^{k-1} + C_k^k\right)}_{\overset{\text{R.S.}}{=}\, C_{k+1}^k} a b^k + \underbrace{C_k^k}_{\overset{\text{C.F.}}{=}\, 1 \,=\, C_{k+1}^{k+1}} b^{k+1}$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

Usando a relação de Stifel e as condições de fronteira obtém-se:

$$P(k+1):\ (a+b)^{k+1} = C_{k+1}^{0}a^{k+1} + C_{k+1}^{1}a^{k}b + C_{k+1}^{2}a^{k-1}b^{2} +$$

$$+ C_{k+1}^{k}ab^{k} + C_{k+1}^{k+1}b^{k+1} =$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

Usando a relação de Stifel e as condições de fronteira obtém-se:

$$P(k+1):\ (a+b)^{k+1} = C_{k+1}^{0}a^{k+1} + C_{k+1}^{1}a^{k}\,b + C_{k+1}^{2}a^{k-1}\,b^{2} + $$

$$+ C_{k+1}^{k}ab^{k} + C_{k+1}^{k+1}b^{k+1} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^{r}a^{k+1-r}\,b^{r}$$

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

Usando a relação de Stifel e as condições de fronteira obtém-se:

$$P(k+1):\ (a+b)^{k+1} = C^{0}_{k+1}a^{k+1} + C^{1}_{k+1}a^{k}\,b + C^{2}_{k+1}a^{k-1}\,b^{2} + $$

$$+ C^{k}_{k+1}ab^{k} + C^{k+1}_{k+1}b^{k+1} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} C^{r}_{k+1}a^{k+1-r}\,b^{r}$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira

Binômio de Newton

Desenvolvimento indutivo (continuação):

Usando a relação de Stifel e as condições de fronteira obtém-se:

$$P(k+1):\ (a+b)^{k+1} = C_{k+1}^{0}a^{k+1} + C_{k+1}^{1}a^{k}b + C_{k+1}^{2}a^{k-1}b^{2} + $$

$$+ C_{k+1}^{k}ab^{k} + C_{k+1}^{k+1}b^{k+1} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^{r}a^{k+1-r}b^{r}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira

Então, pelo princípio de indução matemática tem-se

$$P(n):\ (a+b)^{n} = \sum_{r=0}^{n} C_{n}^{r}a^{n-r}b^{r} \text{ é verdadeira } \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

Binômio de Newton

Observações:

$$(a+b)^n \overset{T.B.}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$$

Binômio de Newton

Observações:

$$(a+b)^n \overset{T.B.}{=} \underbrace{\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r}$$

desenvolvimento ou expansão
da potência n de a + b

Binômio de Newton

Observações:

$$(a+b)^n \stackrel{\text{T.B.}}{=} \underbrace{\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r}_{\text{desenvolvimento ou expansão da potência n de a + b}}$$

(1) Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

Binômio de Newton

Observações:

$$(a+b)^n \stackrel{T.B.}{=} \underbrace{\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r}_{\text{desenvolvimento ou expansão da potência n de a + b}}$$

(1) Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

(por exemplo, $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3$)

Binômio de Newton

Observações:

$$(a+b)^n \overset{T.B.}{=} \underbrace{\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r}$$

desenvolvimento ou expansão
da potência n de a + b

(1) Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

(por exemplo, $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3$)

(2) O desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem $(n+1)$ termos

Binômio de Newton

Observações:

$$(a+b)^n \overset{T.B.}{=} \underbrace{\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r}_{}$$

desenvolvimento ou expansão
da potência n de a + b

(1) Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

(por exemplo, $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3$)

(2) O desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem $(n+1)$ termos

(3) O somando $(r+1)$ do desenvolvimento de $(a+b)^n$

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$$

Binômio de Newton

Observações:

$$(a+b)^n \overset{T.B.}{=} \underbrace{\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r}$$

desenvolvimento ou expansão
da potência n de a + b

(1) Os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

(por exemplo, $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3$)

(2) O desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem $(n+1)$ termos

(3) O somando $(r+1)$ do desenvolvimento de $(a+b)^n$

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$$

(por exemplo, o segundo somando de $(a+b)^3$ é $T_2 = C_3^1 a^2 b$, $n = 3$, $r = 1$)

Exemplo 4:

Determine a expansão de $(x + 3)^4$.

Exemplo 4:

Determine a expansão de $(x + 3)^4$.

Resolução:

$$(x + 3)^4 \overset{\text{B.N.}}{=} C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 .3 + C_4^2 x^2 .3^2 + C_4^3 x.3^3 + C_4^4 3^4$$

Exemplo 4:

Determine a expansão de $(x + 3)^4$.

Resolução:

$$(x+3)^4 \overset{\text{B.N.}}{=} C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3.3 + C_4^2 x^2.3^2 + C_4^3 x.3^3 + C_4^4 3^4$$

Triângulo de Pascal até n = 4

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
$$

Exemplo 4:

Determine a expansão de $(x + 3)^4$.

Resolução:

$$(x+3)^4 \overset{\text{B.N.}}{=} C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3.3 + C_4^2 x^2.3^2 + C_4^3 x.3^3 + C_4^4 3^4$$

Triângulo de Pascal até n = 4

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Exemplo 4:

Determine a expansão de $(x + 3)^4$.

Resolução:

$$(x+3)^4 \overset{\text{B.N.}}{=} C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3.3 + C_4^2 x^2.3^2 + C_4^3 x.3^3 + C_4^4 3^4$$

Triângulo de Pascal até n = 4

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Resposta: $(x+3)^4 = x^4 + 4.3x^3 + 6.9\ x^2 + 4.27\ x + 81$

Exemplo 4:

Determine a expansão de $(x + 3)^4$.

Resolução:

$$(x+3)^4 \overset{B.N.}{=} C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3.3 + C_4^2 x^2.3^2 + C_4^3 x.3^3 + C_4^4 3^4$$

Triângulo de Pascal até n = 4

				C_0^0				
			C_1^0		C_1^1			
		C_2^0		C_2^1		C_2^2		
	C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3	
C_4^0		C_4^1		C_4^2		C_4^3		C_4^4

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Resposta: $(x+3)^4 = x^4 + 4.3x^3 + 6.9\,x^2 + 4.27\,x + 81 =$

$= x^4 + 12\,x^3 + 54\,x^2 + 108\,x + 81$

Binômio de Newton

Exemplo 5:

Seja n um número natural. Prove que para todo número real x se verifica:

$$(x + 1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r$$

Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de $(x - 1)^n$, para $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de $(x - 1)^n$, para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

No teorema do binômio de Newton consideramos

$$a := x\,, \quad b := -1$$

Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de $(x - 1)^n$, para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

No teorema do binômio de Newton consideramos

$$a := x\,, \quad b := -1$$

Logo, $\quad (x - 1)^n = (x + (-1))^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r}(-1)^r$

Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de $(x - 1)^n$, para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

No teorema do binômio de Newton consideramos

$$a := x \,, \quad b := -1$$

Logo,

$$(x - 1)^n = (x + (-1))^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r} (-1)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de $(x-1)^n$, para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

No teorema do binômio de Newton consideramos

$$a := x\,, \quad b := -1$$

Logo, $$(x-1)^n = (x+(-1))^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r}(-1)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

isto é, $$(x-1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de $(x-1)^n$, para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

No teorema do binômio de Newton consideramos

$$a := x\,, \quad b := -1$$

Logo, $$(x-1)^n = (x+(-1))^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r}(-1)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

isto é, $$(x-1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

- Ilustração: $(x-1)^5$

Exemplo 6:

Seja n um número natural. Determine a expansão do binômio de Newton de $(x-1)^n$, para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

No teorema do binômio de Newton consideramos

$$a := x\,, \quad b := -1$$

Logo, $$(x-1)^n = (x+(-1))^n \overset{\text{B.N.}}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r}(-1)^r = $$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

isto é, $$(x-1)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r (-1)^r x^{n-r}$$

Ilustração: $(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

Binômio de Newton

Observação:

$$(a + b)^n = (b + a)^n \overset{B.N.}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r b^{n-r} a^r \ ,$$

Binômio de Newton

Observação:

$$(a+b)^n = (b+a)^n \overset{B.N.}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r b^{n-r} a^r \ ,$$

substituindo r por k , resulta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Binômio de Newton

Observação:

$$(a+b)^n = (b+a)^n \overset{B.N.}{=} \sum_{r=0}^{n} C_n^r b^{n-r} a^r \ ,$$

substituindo r por k , resulta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Outra notação:

$$\binom{n}{k} := C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$(a+b)^n \overset{B.N.}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Binômio de Newton

Propriedade

Dados a e b números reais e n um número natural, o binômio de Newton admite o seguinte desenvolvimento

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^k b^{n-k}$$

Prova (desafio!)

Use a condição complementar ou de simetria do coeficiente binomial.

Exemplo 7:

Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$$

Binômio de Newton

Exemplo 7:

Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$$

Resolução:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Binômio de Newton

Exemplo 7:

Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$$

Resolução:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Exemplo 7:

Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$$

Resolução:

$$(a+b)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Consideramos $a = x^3$, $b = -\dfrac{1}{x^2}$, $n = 9$:

Binômio de Newton

Resolução (continuação):

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^3)^{9-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \qquad 0 \le k \le 9$$

Binômio de Newton

Resolução (continuação):

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^3)^{9-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \qquad 0 \le k \le 9$$

$$= \binom{9}{k}(-1)^k \frac{x^{27-3k}}{x^{2k}} =$$

Binômio de Newton

Resolução (continuação):

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^3)^{9-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \qquad 0 \le k \le 9$$

$$= \binom{9}{k}(-1)^k \frac{x^{27-3k}}{x^{2k}} =$$

$$= (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-3k-2k} = (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-5k}$$

Resolução (continuação):

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^3)^{9-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \qquad 0 \le k \le 9$$

$$= \binom{9}{k}(-1)^k \frac{x^{27-3k}}{x^{2k}} =$$

$$= (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-3k-2k} = (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-5k}$$

Logo, devemos determinar k tal que $T_{k+1} = (-1)^k \binom{9}{k} x^2$

Resolução (continuação):

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^3)^{9-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \qquad 0 \le k \le 9$$

$$= \binom{9}{k}(-1)^k \frac{x^{27-3k}}{x^{2k}} =$$

$$= (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-3k-2k} = (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-5k}$$

Logo, devemos determinar k tal que $T_{k+1} = (-1)^k \binom{9}{k} x^2$

Portanto, deve ser $27 - 5k = 2 \Rightarrow k = 5$

Binômio de Newton

Resolução (continuação):

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(x^3)^{9-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \qquad 0 \le k \le 9$$

$$= \binom{9}{k}(-1)^k \frac{x^{27-3k}}{x^{2k}} =$$

$$= (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-3k-2k} = (-1)^k \binom{9}{k} x^{27-5k}$$

Logo, devemos determinar k tal que $T_{k+1} = (-1)^k \binom{9}{k} x^2$

Portanto, deve ser $27 - 5k = 2 \Rightarrow k = 5$

Resposta:

O coeficiente x^2 de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^9$ é $(-1)^5 \binom{9}{5} = -126$